Sivas Cumhuriyet University
Journal of Economics and Administrative Sciences
E-ISSN: 2687-4032
2021, 22 (1), pp.69-90.
Doi: 10.37880/cumuiibf.740306

PORTFOLIO SIZE CONSTRAINTED MODEL OPTIMIZATION WITH NONLINEAR PROGRAMMING (NLP)

Elif ACAR[1]

Article History:

Date submitted:
20 May 2020
Date accepted:
24 Ferbruary 2021

Jel Codes:
C02, C61, G11

Keywords:
Nonlinear Programming, Excel GRG Solver, Portfolio Size

Abstract

In this study, a model proposal is presented that can be used in Excel GRG module in the presence of portfolio size constraints in portfolio optimization. The proposed model based on Markowitz's portfolio theory is applied to 15 companies in the Borsa Istanbul Stock Market-Technology (BIST). The structure, concepts and optimal solution conditions of nonlinear programming (NLP) problems and solution methods for a basic NLP problem are examined in parallel with the operation of the Excel Generalized Reduced Gradient (GRG). Then, penalty function is used to ensure that portfolio size has a certain value, and a two-objective optimization model targeting low risk and high return is presented. It is proved that the theoretical structure of the objective function established with the penalty function can be solved with the assistance of Excel. The application is made and returns and covariances are calculated using 335 days of companies' data. The portfolio size was selected as 6 and the model was solved for objectives, and portfolio weights with higher return and lower risk than the BIST Technology index were determined. It has been shown that the proposed portfolio model under portfolio size constraint can be easily solved using spreadsheets, formulas and solver of Excel without the need for complex algorithms.

Suggested Citation: Acar, E. (2021). Portfolio Size Constrainted Model Optimization with Nonlinear Programming (NLP). *Sivas Cumhuriyet University Journal of Economics and Administrative Sciences, 22*(1),69-90.

[1] Dr. Öğr. Üyesi, Yozgat Bozok Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, elif.acar@yobu.edu.tr, ORCID ID: 0000-0001-6974-4866

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi
E-ISSN: 2687-4032
2021, 22 (1), ss.69-90.
Doi: 10.37880/cumuiibf.740306

DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA (DOP) İLE PORTFÖY BÜYÜKLÜĞÜ KISITLAMALI MODEL OPTİMİZASYONU

Elif ACAR[1]

Öz

Bu çalışmada, portföy optimizasyonu konusunda portföy büyüklüğü kısıtlamasının varlığında Excel Çözücü GRG modülünde kullanılabilecek bir model önerisi sunulmaktadır. Önerilen model, Markowitz'in portföy teorisini temel alarak, BİST Teknoloji endeksinde yer alan 15 şirket üzerine uygulanmaktadır. Çalışmada öncelikle, DOP problemlerinin yapısı, kavramları, optimal çözüm şartları ve genel bir DOP problemi çözüm yöntemleri, Excel Çözücü GRG modülünün işleyişi paralelinde incelenmiştir. Sonra, portföy büyüklüğünün belirli değerde olması için Ceza fonksiyonu kullanılmıştır ve düşük risk ve yüksek getiri hedefleyen iki amaçlı optimizasyon modeli sunulmuştur. Ceza fonksiyonu ile birlikte kurulan amaç fonksiyonun Excel GRG Çözücü modülü ile çözümlenebileceğinin teorik yapısı tartışılmıştır. Daha sonra, uygulama yapılmıştır ve Şirketlerin 335 günlük verileri kullanılarak getiriler ve kovaryanslar hesaplanmıştır. Portföy büyüklüğü 6 seçilerek model tek ve iki amaçlı olarak çözümlenmiştir ve BİST Teknoloji endeksinden daha yüksek getirili ve daha düşük riske sahip portföy ağırlıkları belirlenmiştir. Portföy büyüklüğü kısıtı altında önerilen portföy modelinin karmaşık algoritmalara ihtiyaç duymadan Excel'in hesap tabloları, formülleri ve GRG Çözücüsü kullanılarak kolaylıkla çözümlenebileceği gösterilmiştir.

Makale Geçmişi:

İletilen Tarih:
20 Mayıs 2020
Kabul Tarihi:
24 Şubat 2021

Jel Kodları:

C02, C61, G11

Anahtar Kelimeler:

Doğrusal Olmayan Programlama, Excel GRG Çözücü, Portföy Büyüklüğü

Önerilen Alıntı: Acar, E. (2021). Doğrusal Olmayan Programlama (DOP) ile Portföy Büyüklüğü Kısıtlamalı Model Optimizasyonu. *Sivas Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, 22*(1), 69-90.

[1] Dr. Öğr. Üyesi, Yozgat Bozok Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, elif.acar@yobu.edu.tr, ORCID ID: 0000-0001-6974-4866

1. GİRİŞ

Yatırımcılar tasarruflarını kazanca dönüştürmek için yatırım araçlarını kullanarak fonlarını değerlendirebilmektedir. Fonlarını birden fazla yatırım aracına paylaştırarak portföy oluşturabilirler ve böylece katlanmak zorunda oldukları riski paylaştırabilirler. Risk bakımından yüksek finansal piyasalardan biri olan borsada işlem gören pay senetlerine yatırım yapılması portföyün etkin biçimde yönetilmesini ve optimizasyonunu gerekli kılmaktadır. Portföy optimizasyonu; eldeki fonların yatırım araçları arasında etkin dağıtımının sağlanmasıyla hangi araca ne kadar yatırım yapılırsa diğer bir ifadeyle portföye hangi yatırım elemanları ne miktarda seçilirse portföy en düşük riski taşır ve/veya en yüksek getiriyi sağlar problemini çözmeye yardımcı olan bir modeldir. Portföy optimizasyonu konusunda 1952'de Harry Markowitz'in Ortalama-Varyans teorisi geçmişten günümüze yapılmış çalışmalar arasında hala öncü ve hala geçerliliğini koruyan bir teoridir.

Bu teoriye göre; portföy elemanları arasındaki korelasyon önemlidir, aralarında aynı yönlü ve yüksek ilişki olan elemanların seçilmesinin portföyün riskini düşürmede etkisi olamaz, çünkü aynı eleman gibi olacaklardır. Portföy elemanların korelasyonu düşük olursa bir elemandan kaybederken diğer elemandan kazanarak risk düşürülebilir. İki elemanın varyansları eşitse portföy içerisinde birleşik olduklarında portföyün varyansı her elemanın bireysel varyansından düşük olmaktadır (Markowitz, 1952:89). Bu teoride risk her elemanın varyansıyla ilişkilendirilmemiştir; elemanlar arasındaki korelasyonun standartlaştırılmamış biçimi olan ve birlikte değişimi gösteren kovaryansla ilişkilendirilmiştir. Kovaryans formülüne göre oluşturulan risk fonksiyonu ikinci dereceden bir amaç fonksiyonu yaratacağı için problemin Doğrusal Olmayan Programlama (DOP) ile çözümlenmesi gerekmektedir. Portföy optimizasyonu problemleri çok değişkenli ve kısıtlı doğrusal olmayan programlama problemleridir.

Portföy optimizasyonu gibi gerçek hayattaki problemlerin çoğu doğrusal olmayan yapıları içermektedir. Talep, üretim, fiyat vb. gibi fonksiyonlar doğrusal olmayan özellik gösterebilirler. Bu yapıdaki problemlerin optimal çözümünün sağlanabilmesi için DOP problemlerinin anlaşılması önemlidir. 1960'lardan sonra DOP problemlerinin çözümünde önemli gelişmeler sağlanmıştır ve bu yöntemlere duyulan güven ve ilgi artmıştır (Bahtiyar, 1989:2). İkinci dereceden yüksek olan DOP problemleri için meta sezgisel çözüm yöntemleri bulunsa da portföy optimizasyonu gibi ikinci dereceden fonksiyonların bulunduğu DOP ile çözüm alanında hala boşluklar bulunmaktadır. Özellikle de portföy büyüklüğünün kontrolünün sağlanmasında.

Portföydeki iyi bir çeşitlendirmenin sağladığı riskin azalması avantajı ile portföydeki eleman sayının artışıyla artacak maliyetler dezavantajı arasında denge kurulması ve optimal portföy büyüklüğünün belirlenmesi gerekmektedir (Irala ve Patil, 2007). Bu nedenle portföy optimizasyonu problemlerinde portföy büyüklüğü serbest bırakılan bir değişken olmamalıdır. Portföyde yer alacak pay senedi sayısının fazla olması; portföyün yönetilmesini güçleştirmektedir ve alım satımlarında ödenen komisyonların hesaplamalara dahil edilmemesi sebebiyle ciddi külfet oluşturmaktadır (Korhan, 2013:29). Tüm bu sebeplerle çalışmada portföy büyüklüğünün belirli bir limitte tutulmasını sağlayan ek bir kısıtlama modele dahil edilecektir. Literatürde portföy optimizasyonu yapan çalışmalar incelendiğinde Excel Çözücü DOP ile yapılmış çalışmalarda portföy büyüklüğünün belirli bir değerde olması uygulaması gözlenmemiştir, bu sorun ancak meta sezgisel yöntemler ve gelişmiş yazılımlar kullanarak çözümlenebilmiştir. Fakat DOP ile çözülebilen bir problemi optimale yakın çözümler verebilen sezgisel yöntemler kullanarak çözmek doğru olmayacaktır. Çalışmanın literatüre katkısı bu yöndedir. Excel doğrusal olmayan GRG çözücü ile portföy büyüklüğü kısıtlaması varlığındaki bu sorun çözümlenecektir ve kullanılacak formüller sunulacaktır. Bu çalışmanın diğer çalışmalardan farkı, konuya finans yönetimi açısından bakmadan, matematiksel denklemlerin teoriye uygun olarak hazırlanması ile uygulayıcılar için kullanışlı bir model sunmasıdır. Ayrıca, finansal yönetim açısından, ilgili literatürde BİST 100 ve 30 üzerinden portföyler oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu çalışmada BİST Teknoloji (XUTEK) alanındaki pay senetleri için portföy oluşturulacaktır. Teknoloji çağın ötesinde her zaman ilerleme kaydeden sektörlerden biridir ve yatırımcılar bu alanda fonlarını değerlendirmek isteyebilirler.

Bu çalışmanın amacı portföyde yer alacak pay senedi sayısının opsiyonel olarak belirlenebilmesi için Ceza fonksiyonu kullanarak Excel ortamında bir model önermek, önerilen modelin Excel'de formülleştirilmesini göstermek, önerilen modelin kullanılabilirliğini farklı amaçtaki portföy oluşturma probleminde sınamaktır. Bu doğrultuda en düşük riski amaçlayan, en yüksek getiriyi amaçlayan tek amaçlı modeller ve hem düşük riski hem yüksek getiriyi amaçlayan iki amaçlı model çözümleri önerilen Ceza fonksiyonu ile gerçekleştirilecektir. Çalışmadaki diğer bir amaç DOP problemlerinden elde edilen sonuçların global en iyi çözüme ulaşması için problem yapısının ve DOP varsayımlarının anlaşılmasını sağlamaktır.

Çalışmada öncelikle literatür bölümünde konuyla ilgili benzer geçmiş çalışmalardan farklılıklar ve dayanaklar sunulacaktır. Yöntem bölümünde, Excel Çözücünün işleyişinin anlaşılması bakımından DOP problemlerinin yapısı, kavramları, optimal çözümler için problemin konveks yapıda olup olmadığı ve klasik bir genel DOP problemi için kullanılan çözüm yöntemleri sunulacaktır. Daha sonra önerilen modelin kurulumu ifade edilecektir ve portföy büyüklüğünün belirli değerde olması yönündeki kısıtlama Excel'de yazılması gereken formüller belirtilerek Ceza fonksiyonuna dönüştürülecektir. Bu ceza fonksiyonunu içeren; belirli bir getiri düzeyi için en düşük riski sağlayan tek amaçlı model, belirli bir risk altında en yüksek getiriyi sağlayan tek amaçlı model ve hem düşük risk hem yüksek getiriye eşit önem veren iki amaçlı model çözümlenecektir. Kısıt şartı taşıyan portföy problemlerinin Excel Çözücü Doğrusal Olmayan GRG modülü ile çözümlenebileceği gösterilecektir.

2. LİTERATÜR TARAMASI

Literatür genelinde, DOP ile portföy optimizasyonu yapan çalışmaların çoğunluğunda Excel Çözücü kullanıldığı gözlenmiştir fakat portföy büyüklüğü modelde serbest bırakılmıştır. Ulucan, (2002) çalışması öncü bir çalışma olup Excel Çözücü ile portföy optimizasyonu formülsel aşamalarını ayrıntılı betimlemiştir. İMKB 30'daki pay senetlerinin 50 aylık verileriyle İMKB 30 getiri ve risk değerini ayrı ayrı hedef belirleyerek en düşük riskli ve en yüksek getirili portföylerdeki pay senetlerinin ağırlıklarını bulmuştur ve etkin sınır çizmiştir. Çalışmanın ilerletilmesi aşamasında portföyde yer alacak varlık sayısının belirlenmesini önermiştir. Bu çalışmada Ulucan'nın (2002) önerisi doğrultusunda portföy büyüklüğünün belirli değerde olması sağlanacaktır. Ulucan'nın Excel formülleri genişletilerek eklemelerde bulunulacaktır.

Küçükkocaoğlu (2002), İMKB 30'daki pay senetlerinin 235 günlük getirileri için Markovitz Ortalama Varyans modelini kullanmıştır. Pay senetlerinin günlük verilerinden hareketle öncelikle İMKB 30'daki 30 pay senedinin ağırlığını eşit alarak bir varyans yani risk değeri hesaplamıştır. Hesapladığı bu risk değerini daha sonra belirleyici olarak kullanarak açığa satış olanağı olan ve olmayan durumlar için getiriyi en yüksek yapmaya çalışarak portföyde yer alacak pay senetlerinin ağırlıklarını bulmuştur. Karesel programlama modelini çözerken Excel Çözücü kullanmıştır. Portföy büyüklüğünü hesaplamalara katmamıştır.

Kaya, (2006) İMKB 100 endeksinde yer alan pay senetlerinin 2004 yılındaki 1 yıllık dönemi için 12 aylık verisi ile portföy optimizasyonu yapmıştır. Standart Ortalama Varyans modeli ile Excel Çözücü doğrusal olmayan GRG modülünü kullanmıştır. Portföydeki bir pay senedinin ağırlığının en fazla %40 olması üst sınırını getirmiştir ve kısıtlarına eklemiştir. Çeşitli getiriler için en küçük varyansa sahip portföyler belirlenmiştir. Etkin sınırda yer alan portföylerin performansını Sharpe oranı ile sıralayarak optimum portföyü belirlemiştir.

Çetin, (2007) çalışmasında, İMKB 30 pay senetlerinin 6 aylık dönemde günlük getirilerini kullanarak her bir pay senedine eşit ağırlık vererek portföy riskini hesaplamış ve bu risk değerini hedefleyerek farklı ağırlıktaki pay senetlerinden oluşan, açığa satış olanağı olan ve olmayan (pay senedi ağırlığı için $w \geq 0$ kısıtı eklenmesi) portföyler için modeli çalıştırmıştır. Açığa satış olanağı olmayan portföy getirisi en yüksek çıktığından optimal portföy olarak seçmiştir.

Abay, (2013) Markovitz modelini kullanarak, İMKB 30'da yer alan 20 adet pay senedi için, 2005 yılı 12 aylık veriyle etkin portföyler belirlemiştir. Pay senedi getirileri ve kovaryans matrisleri için Excel programı kullanmış, hedeflenen getiri ve risk oranları ile etkin sınır belirlemede ve modelin optimize edilmesinde ise Lingo paket programını kullanmıştır.

Aygören ve Ayker, (2013) BİST 30'da yer alan 9 adet pay senedinin 1992-2011 yılları arasındaki günlük, haftalık ve aylık getirilerini kullanmıştır. Portföy oluşturma problemini Markovitz ortalama varyans modeliyle modellemiş GAM programında çözümlemiştir. İki farklı getiri oranı için günlük, haftalık ve aylık verilerle portföyler oluşturmuştur. Etkin sınırda yer alan portföyleri, risk grubu düşük, orta ve yüksek olarak ayırmıştır. Portföylerin ağırlıklarının arasındaki farkın önemli olup olmadığını Ki Kare (X^2) test istatistiği ile test etmiştir. Düşük ve orta risk düzeyinde, günlük ve haftalık veriler kullanılırsa pay senetlerinin ağırlıkları homojendir ve yüksek risk düzeyinde haftalık ya da aylık veri kullanılırsa pay senetlerinin ağırlıkları homojendir sonuçlarına ulaşmıştır. Bu ve diğer çalışmalar, DOP kullananlar olarak sınırlandırıldığında Tablo 1 sonuçları elde edilmektedir.

Tablo 1: Portföy Optimizasyonunda DOP Kullanan Çalışmalar

Yazar	Program	Portföy Büyüklüğü
Ulucan (2002)	Excel	Serbest
Küçükkocaoğlu(2002)	Excel	Serbest
Kaya (2006)	Excel	Serbest
Çetin (2007)	Excel	Serbest
İskenderoğlu ve Karadeniz (2011)	Excel	Serbest, en az ve en çok.
Aygören ve Ayker, (2013)	Farklı	Serbest
Akçayır vd. (2014)	Excel	Serbest
Toraman ve Yürük (2014)	Excel	Serbest

Tablo 1'de görüldüğü üzere literatürdeki ulusal çalışmalarda portföy büyüklüğü serbest bırakılarak modeller kurulmuştur. Tablodaki ve benzeri çalışmalarda portföy büyüklüğünü kısıtlayan ve Excel GRG çözücü ile çözümleyen çalışma bulunmamaktadır. Portföy büyüklüğünü kısıtlayan çalışmalarda daha çok Genetik Algoritmalarla çözümleme yapılmıştır.

Akay, Çetinyokuş ve Dağdeviren (2002) belirli getiri değeri için minimum varyanslı ve belirli risk için maksimum getiri sağlayan ve pay senedi sayısının opsiyonel olduğu bir modeli Genetik Algoritmalarla çözümlemiştir. Riske ve getiriye farklı önem dereceleri vererek optimal portföyler oluşturup senaryolar üretmiştir. Bu makalede ise Akay vd.'nin (2002) çalışmasında kullanılan model üzerine ceza fonksiyonu eklenerek model genişletilerek, Excel GRG çözücü ile çözümlenecektir.

İskenderoğlu ve Karadeniz (2011) ve Tosun ve Oruç (2010) çalışmasına dayanarak portföy büyüklüğünün sabit bir değerde tutulması için seçilecek değer 6 olarak belirlenmiştir. İskenderoğlu ve Karadeniz (2011), bir portföyde bulunması gereken optimal varlık yani pay senedi sayısını, eşit ağırlıklandırılmış ve optimal ağırlıklandırılmış portföyler için araştırmıştır. Değişim katsayısı ve risk kriterlerine göre her bir pay senedinin portföyde yarattığı etkiyi ölçerek İMKB 100 ve 30'dan oluşacak portföy için en çok ve en az pay senedi sayılarını önermişlerdir. Bu sınırların değişim katsayısı ve risk birlikte düşünüldüğünde kritik limitleri en az 2 ve en çok 8 olması gerektiği yönündedir. Tosun ve Oruç'a göre (2010) optimal pay senedi sayısı kullanılan yönteme ve ele alınan veri setine göre farklılık göstermektedir. Çalışmalarından elde ettikleri nihai sonuca göre, portföyde 5-7 adet pay senedi bulunmasının yatırımcılar için faydalı olacağını düşünmektedirler. Kullandıkları göstergeler ışığında 6 adet pay senedinden oluşan portföyün yatırımcılar için yeterli çeşitlendirmeyi sağlayacağını öngörmüşlerdir.

3. DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA

Optimizasyon, belirli bir amacı gerçekleştirmeye yönelik karar vermeye yardımcı olarak, belirli sınırlar altında alternatifler arasından istenen amacı en iyileyecek olan karar değişkenlerinin seçimi olan matematiksel modelin çözümüdür. Matematiksel anlamda optimizasyon terimi, tanımlı bir aralıkta belirlenen değişkenlerin fonksiyona yerleştirilmesi ile fonksiyonun amaca uygun biçimde maksimize ya da minimize edilmesini sağlayarak problemin sistematik olarak modellenmesi, incelenmesi ve çözümlenmesidir.

Optimizasyon problemlerinin çözüm teknikleri problemin yapısına göre farklılaşmaktadır. Çözüm için analitik yöntemlerden sezgisel yöntemler ve meta-sezgisel yöntemler kullanılmaktadır. Klasik doğrusal programlama modelleri analitik yöntemlerle çözülebilirken DOP problemlerinin çözümünde algoritma tabanlı sezgisel yaklaşık çözüm tekniklerine başvurmak gerekebilir, çok büyük boyutlu karmaşık problemler için ise meta-sezgisel yöntemler kullanılmaktadır.

Yöneylem araştırmasında karşılaşılan çoğu problem için geliştirilen matematiksel programlama modelinin kısıtlarında ya da amaç fonksiyonunda lineer olmayan durumlar var ise problemin çözüm yöntemi DOP olarak isimlendirilir. Bu teori ilk olarak Kuhn ve Tucker (1951) araştırmasında ortaya konulmuştur. Gerçek hayat problemlerinde doğrusal ilişkileri gözlemek zordur. Doğrusal olmayan problemlerin çözümü klasik doğrusal programlamaya göre çok daha karmaşıktır fakat bilgisayar programları sayesinde bu güçlükler ortadan kalkmaktadır.

Model olarak "m" adet kısıttan ve "n" adet değişkenden oluşan bir doğrusal olmayan programlama problemi matematiksel olarak aşağıdaki biçimde ifade edilir. $x \in IR^n$ karar değişkenlerini ifade eder.

Amaç Fonksiyonu; $Min\ veya\ Max\ Z = f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(X)$

Kısıt; $g_m(x_1, x_2, \dots x_n) \leq b_m$

Modeldeki "g" fonksiyonu problemin kısıt denklemleridir, eşitlik ve eşitsizlik kısıtlarından oluşabilir. Kısıt kümesindeki her bir eşitlik veya eşitsizliği sağlayan uygun noktaların kümesine uygun bölge denir.

3.1. Kavramlar

Konveks Küme: Bir küme içinde herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının tamamı kümenin içerisinde yer alıyorsa bu kümeye konveks küme denir. DOP problemlerinde optimal çözüme ulaşılabilmesi için kısıt kümesinin konveks yapıda olması beklenir.

Gradyan: Bir $f(x_1, x_2, \dots .. x_n)$ fonksiyonunun her karar değişkeni için birinci dereceden kısmi türevine "Gradyan' denir ve eşitlik 1'deki gibi gösterilir (Kunt ve Hammond, 1995: 503).

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial n}\right) \tag{1}$$

Bir amaç fonksiyonunun gradyanının $\nabla f(X) = 0$ olması sağlanarak çözümlenmesi ile elde edilen kritik noktalara yerel en iyi çözümler denir. Karar değişkenlerinin yerel en iyi sonuç değerleridir. Problemin birden fazla yerel en iyi çözümü varsa, hangi çözümlerin global en iyi çözümü sağladığı ikinci türev testleri ile bulunabilir.

Hessian Matrisi: Bir $f(x_1, x_2, \dots .. x_n)$ fonksiyonunun ikinci dereceden kısmi türevlerinden oluşturulan nxn'lik matrise "Hessian Matrisi" denir ve eşitlik 2'deki gibi gösterilir (Winston, 2003: 656).

$$\nabla^2 f(X) = H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Konveks Fonksiyon: Doğrusal fonksiyonlar konveks kabul edilir. Doğrusal olmayan bir fonksiyonun konveks olup olmadığı ikinci dereceden türevine bakılarak tespit edilir. Fonksiyon tek değişkenli iken; fonksiyonun ikinci türevi "0" dan küçükse fonksiyon konveks değildir. Fonksiyonun ikinci dereceden türevi "0"dan büyükse fonksiyon konvekstir. $f''(x) \leq 0$ ise konkav, $f''(x) \geq 0$ ise konvekstir.

İki değişkenli fonksiyonlarda; ikinci dereceden kısmi türevler her değişken için sıfırdan büyükse fonksiyon konveks (minimum noktaya sahiptir), sıfırdan küçükse fonksiyon konkavdır (maksimum noktaya sahiptir).

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^2} \geq 0\ ve\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^2} \geq 0\ ise\ Konveks\ min\ noktaya\ sahip \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^2} \leq 0 \; ve \; \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^2} \leq 0 \; ise \; Konkav \; max \; noktaya \; sahip \tag{4}$$

İkiden fazla değişken olması durumunda Hessian matrisinin asal minörlerinin yani sırayla (n-k). satır ve (n-k). sütun silinerek elde kalan matrisin determinant değerlerinin hepsi pozitifse fonksiyon konvekstir (Erdoğan ve Alptekin 2006:17).

3.2. Optimallik

DOP problemlerinde amaç fonksiyonu ve/veya kısıtlarda doğrusal olmayan denklemler bulunduğu için çözüm kümesi konveks olmayabilir, çözüm için bulunan noktalar yerel en iyi çözümü sağlarken global ya da mutlak en iyi çözümü vermeyebilir, global en iyi çözümden ne kadar uzakta olduğunu vermeyebilir. Dolayısıyla sonuçlar optimal olmayabilir. Bu sebeple amaç fonksiyonunun ve çözüm kümesinin konveks olup olmadığının belirlenmesi gerekmektedir (Bazaraa vd, 1993; Yazıcı, 2005:21).

Amaç fonksiyonu türevlenebilir ve doğrusal olmayan bir fonksiyon iken, kısıtlar doğrusal denklemlerden oluşuyorsa; amaç fonksiyonu konveks ise yerel minimum global minimumdur amaç fonksiyonu konkav ise yerel maksimum global maksimumdur (Winston, 2004:685). Eğer kısıtlayıcı denklemler de doğrusal değilse çözüm uzayının konveks olması beklenir ya da kısıtlayıcıların konveks biçimine dönüştürülmesi gerekir (Winston, 2004:695; Taha, 2000:767). Konveks olmayan problemlerin çözümünde pek çok farklı algoritma tabanlı çözüm yöntemleri yerel en iyi noktaları bulmada sorun yaşamazken, global en iyi noktaları bulmada yetersiz kalmaktadır.

3.3. Çözüm Teknikleri

DOP problemlerinde en iyi çözümü bulmak için geliştirilen yöntemler amaç fonksiyonun ve kısıtların yapısına göre değişmektedir. İlk ayrım olarak; problemin tek değişkenli ve çok değişkenli olmasına göre kullanılan çözüm teknikleri farklıdır. Tek değişkenli kısıtsız optimizasyonda; Aralığı ikiye bölme, Yarı aralık ve Altın oran algoritmaları teknikleri yaklaşık çözüm sunmaktadır (Erdoğan ve Alptekin, 2006).

Çok değişkenli DOP problemleri kısıtlı ve kısıtsız olmak üzere ikiye ayrılır. Kısıtlı problemler amaç ve kısıt fonksiyonlarının özelliğine ve problemin yapısına göre belli başlı olarak; Ayrılabilir Programlama, Kuadratik Programlama, Konveks Programlama, Geometrik Programlama, Stokastik Programlama biçiminde sınıflandırılmaktadır. Her programlamanın çözüm yöntemi de farklılaşmaktadır. Bu ayrıma girmeyen genel bir kısıtlı DOP problemi Lagrange Çarpanları, Kuhn Tucker Koşulları, Ceza ve Engel fonksiyonu yöntemleri ile çözümlenebilir ve/veya kısıtlarından arındırılabilir. Daha sonra çok değişkenli kısıtsız DOP problemlerinin yaklaşık çözüm metotları olan Gradyan ve Newton yöntemleri kullanılabilir.

Lagrange Yöntemi: Çok değişkenli bir DOP problemi eşitlik biçiminde kısıtlayıcı fonksiyonlar içeriyorsa analitik bir çözüm yöntemi olan Lagrange fonksiyonunun kullanılmasıyla; kısıtlı problem, Lagrange çarpanlı kısıtsız bir problem haline gelir. Lagrance çarpanının (λ) ekonomik anlamı ek kaynak kullanımının amaca katkısını sunan gölge fiyatları vermektedir. Konveks olmayan problemler için genişletilmiş Lagrange fonksiyonları kullanılması gerekmektedir (Yazıcı, 2005).

Yöntemin varsayımları; amaç fonksiyonu ve kısıtlar türevlenebilir sürekli fonksiyonlar olmalıdır ve karar değişkeni sayısı (n) kısıtlayıcı fonksiyon sayısından (m) fazla olmalıdır (Markland ve Sweigart, 1987:719). Lagrange çarpan yöntemi eşitlik 5'te ifade edilir (Erdoğan ve Alptekin, 2006).

$$L(X,\lambda) = f(X) + \sum \lambda_i [g_i(X) - b_i] \quad (5)$$

Lagrange tekniğinde, kısıt fonksiyonları önce sıfıra eşitlenerek dönüştürülür ve lamda (λ) ile çarpılarak amaç fonksiyonuna eklenir böylece, kısıtlı problem kısıtsız hale dönüştürülmüş olur. Her bir değişkene ve her bir lamdaya göre kısmi türevler alınarak ve sıfıra eşitlenerek yani $\nabla L(X,\lambda) = 0$ sağlanarak problem çözümlenir.

Karush Kuhn Tucker (KKT) Koşulları: Kısıtlar eşitsizlik biçimde ise amaç fonksiyonu maksimizasyon ise –λ, minimizasyon ise +λ yapılarak Lagrange fonksiyonu eşitlik (5) ile oluşturulur. Kuhn Tucker (KKT) koşulları sağlanarak problem çözümlenir. KKT koşulları eşitlik (6-9) gibidir (Kuhn ve Tucker, 1951):

$$\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_i} \leq 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_i} . x_i = 0 \quad (7)$$

$$g_i(X) - b_i \leq 0 \quad (8)$$

$$\lambda\, [g_i(X) - b_i] = 0 \quad (9)$$

Bu şartları sağlayan noktalar; maksimum problemlerde amaç fonksiyonu konkav, minimum problemlerde amaç fonksiyonu konveks olması ve kısıtların her iki durumda da konveks olması gerekçesiyle optimaldir. Kısıtlar doğrusal değil ise konveks fonksiyon olmalıdır.

Kuadratik Programlama: Amaç fonksiyonu kareli terimler içeriyorsa yani kuadratik formda ve kısıtlar doğrusal olduğunda kullanılır. Problemin optimal çözümü olması için amaç fonksiyonu maksimum ise tam konkav, minimum ise tam konveks olmalıdır (Erdoğan ve Alptekin, 2006: 128). Excel Çözücü Kuadratik programlama problemlerini Gradyan yöntemle çözmektedir.

Ceza ve Engel Yöntemleri: Kısıtların sayısı arttıkça ve kısıtlar doğrusallıktan uzaklaştıkça DOP yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Excel Çözücü kısıtların sayısı artıkça optimal çözümü bulmada zorlanabilir. Ceza ve Engel yöntemleri bu dezavantajların varlığında sonuca kolay ulaşılmasını sağlamaktadır. Ceza ve Engel yöntemleri ile problem kısıtsız hale dönüşür. Eşitlik kısıtlarının varlığında Engel yöntemi eşitsizlik kısıtlarının varlığında Ceza yöntemi uygulanır. Değişik tipte Ceza fonksiyonu örnekleri vardır. Uygulamada çok kullanılan Ceza fonksiyonu, ilgili kısıtın sağlanmama miktarının karesi alınarak amaç fonksiyonuna ters etki edecek biçimde amaç fonksiyonuna eklenmesidir. Bu işlem ceza değerini büyük bir sayıyla çarparak ya da µ ceza parametresi kullanılarak da yapılabilir.

Gradyan Yöntemi: Çok değişkenli fonksiyon içeren ve kısıtların olmadığı bir modelde analitik çözüm yetersiz kalıyorsa yaklaşık çözüm tekniklerinden biri Gradyan yöntemidir. Çok değişkenli fonksiyonun kritik noktalarını bulmak için gradyanı sıfıra eşitlenir. Karmaşık problemlerde bunu analitik yoldan çözmek zordur. Bu sebeple rasgele X_0 gibi bir başlangıç noktasından hareket edilir; fonksiyonun bu noktadaki kısmi türevi hesaplanır. Daha sonra, amaca ters etki etmeyecek biçimde kısmi türevin belli bir katı alınır. Böylece, yeni bir X1 noktasına ulaşılır. Fonksiyonun gradyanı sıfıra eşit oluncaya kadar işlem tekrar eder ve optimum nokta aranır (Edoğan ve Alptekin, 2006:53). Farklı bir ifadeyle Gradyan algoritmaları amaç fonksiyonun bir noktada en hızlı artışının veya azalışının izlenmesiyle bulunur (Taha, 2000:779). Türevlenemeyen ve konveks olmayan problemler için genişletilmiş Sub-Gradyan yöntemi kullanılabilir (Yazıcı, 2005: 31).

3.4. Excel Çözücü GRG Yöntem

Doğrusal olmayan programlama problemleri için Excel Çözücü eklentisinde Genelleştirilmiş İndirgemeli Gradyan (GRG) yöntemi kodu kullanılmaktadır. Bu kod uygulaması Leon Lasdon'un 1973'te ve Alan Waren'nin 1975'te yayımlanan çalışmalarına dayanmaktadır ve en hızlı yöntem olarak kabul edilmektedir (FrontlineSolvers, 2020a; 2020b). GRG yöntemi Simplex yönteminin DOP için genişletilmiş bir uzantısı olarak görülebilir (Lasdon vd, 1978: 34). Çözücü DOP problemleri için en fazla 200 karar değişkeni ve 100 kısıt limitine sahiptir (FrontlineSolvers, 2020c)

Bu çözücü kodu, ilk önce kısıtlı problemi KKT koşulları ile kısıtsız bir optimizasyon problemine çevirmektedir. Amaç fonksiyonun kısmi türevini almaktadır ve kısmi türevler sıfıra eşit olduğunda optimum çözüme ulaşmaktadır. Gradyan yöntemde ifade edildiği gibi bu yöntem bir başlangıç noktası belirler, bir arama yönü belirler ve her ana iterasyonda doğrusal olmayan denklem sistemlerinin uygunluğunu her bir adımda sürdürerek çözüme ulaşır (FrontlineSolvers, 2020d). Excel Çözücüde GRG yöntemi konveks olmayan modeller üzerinde düzeltilmeden kullanılırsa, çözücü yerel en iyi çözümü bulabilir, ama global en iyiyi bulamaz. Bazen yavaş ilerleme kaydettiği için yani bir noktadan diğer noktaya değişim çok azsa yerel en iyi çözümü bulmadan önce de durabilir. Konveks denklemler içeren için model formüllerinde "Eğer" yapı kullanılmışsa yerel en iyiye yakın çözümler bulabilir (FrontlineSolvers, 2020e).

GRG yönteminin işleyişinin ve çözücü mesajlarının anlaşılması açısından bu mesajlar şöyledir (FrontlineSolvers, 2020f): "Çözücü bir çözüm buldu" mesajı, çözücünün yerel en iyiyi bulduğu anlamına gelmektedir. Model konveks yapıda değilse çözümden daha uzakta olan global en iyi çözümü bulamamış olabilir, ama model konvekse global en iyiyi bulmuştur. Matematiksel olarak bu mesaj, yerel optimallik için belirli bir tolerans dahilinde Karush Kuhn Tucker (KKT) koşullarının yerine getirildiği anlamına gelmektedir. Çözücü Seçenekleri iletişim kutusundaki hassas ayarlarda tolerans değeri artırılıp azaltılarak çözüm kontrol edilebilir.

"Çözücü mevcut çözüme yakınsadı" mesajı, amaç fonksiyonu değerinin son 5 iterasyon için çok yavaş değiştiği anlamına gelmektedir. Eğer amaç fonksiyondaki göreceli değişimin mutlak değeri Çözücü Seçenekleri iletişim kutusundaki Yakınsama kutusundaki değerinden azsa, GRG yöntemi KKT koşulları sağlanana kadar daha fazla tekrarlamaya devam etmek yerine vaktinden önce durmaktadır. Varsayılan 1E-4 (0.0001) değeri çoğu problem için uygun olsa da, bazı modeller için çok büyük olabilir. Yakınsama düzenleme kutusundaki ayar 1E-5 veya 1E-6 gibi daha küçük bir değere değiştirilebilir; ancak amaç fonksiyonun neden bu kadar yavaş değiştiği de düşünmelidir. Ek kısıtlama eklenebilir veya değişkenler için farklı başlangıç değerleri kullanılabilir, böylece çözücü yavaş iyileşme bölgesinde "tuzağa düşmemiş" olacaktır.

GRG yönteminde "Çözücü mevcut çözümü iyileştiremez" mesajı nadiren görülmektedir. Bu, modelin dejenere olduğu ve çözücünün muhtemelen "bisiklet sürdüğü" anlamına gelmektedir.

Bazı kısıtların gereksiz olduğu için kaldırılması gerekebilir. Bu öneri yardımcı olmaz ve problem yeniden modellenemezse, Evrimsel Çözme yöntemi kullanılması denenmelidir.

4. ARAŞTIRMA MODELİ

Bu kısımda öncelikle porföy optimizasyonunda kullanılan formüllerdeki terimlerin tanımlamalarına yer verilmiştir ve formüller sunulmuştur. Daha sonra Ceza fonksiyonunun amaç fonksiyonuna eklenmesiyle optimizasyon modelinin amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonları oluşturulmuştur ve optimizasyon modelinin genel gösterimi verilmiştir.

4.1. Terim Tanımlamaları, Getiri ve Varyans Formülleri

r_t : Belli bir dönemdeki pay senedinin getirisidir.

p_t : t dönemindeki pay senedi fiyatıdır.

p_{t-1} : t döneminden bir önceki dönem fiyatıdır.

r_i : Pay senedinin beklenen getirisi, aritmetik ortalama ile hesaplanmıştır.

$E(R)$: Beklenen portföy getirisi, Markovitz’e göre.

w_i : i’inci pay senedinin portföydeki ağırlığını veren karar değişkenidir.

w_j : j’inci pay senedinin portföydeki ağırlığını veren karar değişkenidir.

σ_p^2 : Portföy Varyansı, Markovitz’e göre .

σ_{ij} : İki pay senedi arasındaki kovaryans değeridir.

λ_p : Portföy riskine verilen önemdir (Lagrange λ değildir).

K : Portföydeki toplam pay senedi sayısıdır.

z_i : i’ inci pay senedi portföyde varsa 1 yoksa 0 değerini alan kukla değişkendir.

R : Belirli bir getiri oranıdır.

i : $1, \ldots, n$ i’inci pay senedi için indistir.

$$r_t = \left(\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}\right).100 \qquad (10)$$

$$r_i = \frac{\sum r_t}{N} \qquad (11)$$

$$E(R) = \sum_i^n r_i w_i \qquad (12)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_i^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (13)$$

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + \cdots + w_n^2\sigma_n^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2} + 2w_1w_3\sigma_{1,3} + 2w_{n-1}w_n\sigma_{n-1,n} \quad (14)$$

Eşitlik (14), portföy varyansının matematiksel açılımını sunar.

4.2. Amaç Fonksiyonu ve Kısıtlar

Amaç fonksiyonunda, λ_p'nin değişen değerleri için portföy getirisi (eşitlik (12)) ve portföy varyansı (eşitlik (13)) kullanılmaktadır. Ayrıca portföy büyüklüğü kısıtlaması modelin amaç fonksiyonuna ceza fonksiyonu olarak eklenmektedir. Eşitlik (15), amaç fonksiyonunu ve eşitlik (16-21), kısıtlamaları göstermektedir:

$$Min\ Z = \lambda_p\left[\sum_i^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda_p)\sum_i^n r_i w_i + \left(\sum_i^n z_i - K\right)^2 \quad (15)$$

$$\sum_i^n w_i = 1 \quad (16)$$

$$\sum_i^n z_i \leq K \quad (17)$$

$$\sum_i^n r_i w_i \geq R \quad (18)$$

$$0 \leq w_i \leq 1 \quad (19)$$

$$z_i \in [0,1] \quad (20)$$

$$0 \leq \lambda_p \leq 1 \quad (21)$$

Modeldeki (17) numaralı kısıt amaç fonksiyonuna ceza olarak eklenmiştir. Portföyde bulunacak pay senedi sayısı için ceza fonksiyonu $(\sum_i^n z_i - K)^2$ olarak belirlenmiştir. Amaç fonksiyonu türevlenebilir ve ikinci derece fonksiyondur. Portföy riski hesaplanırken karar değişkeni w'ler ikinci derecedendir ve λ_p'nin işareti sıfırdan büyük olduğundan ikinci dereceden kısmi türevler de sıfırdan büyük olacaktır; amaç fonksiyonu minimum noktaya sahiptir ve konvekstir. (18) numaralı kısıt doğrusal olmayan denklem gibi görünse de denklemdeki "r_i" değerleri sabit katsayıları verdiği için doğrusaldır. Ceza fonksiyonu da doğrusal olmayan denklem görünmektedir fakat parametre değeri girildiği için sabit sayılardır türevi sıfır olacaktır, diğer kısıtlar da doğrusaldır.

5. ANALİZ VE BULGULAR

BİST teknoloji endeksinin bileşenleri olan 15 adet şirketin 10.01.2019 ile 12.05.2020 tarihleri arasındaki 335 günlük verileri investing.com alanından elde edilmiştir. Veriler Excel programına işlendikten sonra şirketlerin günlük getirileri hesaplanarak ortalama getirileri ve varyansları hesaplanmıştır. Pay senetlerinin varyansların bu aşamada hesaplanması kovaryans matrisinin doğruluğunu sınamak için yapılmıştır. Hedeflenen getiri düzeyini belirlemek için BİST 30 (XU030) ve BİST Teknoloji (XUTEK) endekslerinin ortalama getirileri hesaplanmıştır. XUTEK ortalama getirisi BİST 30'dan daha yüksek çıktığı için oluşturulacak portföyün getirisinin XUTEK endeksi ortalama getirisinden büyük olması garanti edilmiştir. BİST 30 ve XUTEK endekslerinin varyansları da hesaplanmıştır. Oluşturulacak portföyün riskinin yani varyansının

XUTEK endeks ortalama risk değerinden daha düşük olması sağlanmıştır. 15 adet karar değişkeni kullanılmıştır. Karar değişkeni sayısı kısıt sayıdan fazladır. Şekil 1, model ön girdi parametrelerinin özetini sunmaktadır. Hücre değerlerinin görünebilir olması için günlük getiri değerleri 100 ile çarpılmıştır.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	TARİH	ALCTL	ARENA	ARMDA	ASELS	DGATE	DESPC	ESCOM	FONET	INDES	KAREL	KRONT	LINK	LOGO	NETAS	PKART	XU030	XUTEK
2	12.05.2020	2.57	3.11	-1.25	2.08	2.66	1.29	-2.56	2.22	4.53	3.77	-0.09	1.55	3.67	2.98	0.54	1.67	2
3	11.05.2020	-0.27	-2.89	0.9	1.36	1.1	0.74	-2.5	-0.9	6.98	-0.2	-2.36	-0.84	0.21	-0.47	-0.85	-0.34	0.98
4	8.05.2020	-2.65	5.2	0.09	-1.19	-3.76	-1.82	-3.61	-2.53	-3.69	-3.5	-1.97	-1.81	-2.64	-2.43	-1.78	-0.3	-1.55
334	14.01.2019	1.06	-3.15	0.23	-0.43	-1.88	-1.41	-1.33	-1.78	2.43	4.08	-1.32	0.12	-1.4	0	6.02	0.51	-0.41
335	11.01.2019	0.71	-2.82	0.35	-1.44	0.71	-0.34	2.74	-0.88	-1.19	0.23	0.36	0.24	1.42	1.07	-3.27	0.61	-1.13
336	10.01.2019	0.18	6.25	-1.7	2.88	1.44	0	0	-5.54	-0.18	-1.12	2.35	2.81	6.42	-0.61	3.38	-0.07	2.82
337																		
338	Ort. Getiri	0.4533	0.4693	0.3584	0.0859	0.3005	0.3162	0.6323	0.6535	0.2245	0.4432	0.3727	0.4464	0.3341	0.2824	0.4458	0.017	0.1447
339	Varyans	17.415	12.554	16.784	6.5262	17.343	12.487	28.294	21.365	9.0472	13.502	14.057	20.162	7.4938	15.515	14.362	2.5517	5.4668

Şekil 1: Excel Model Ön Girdi Parametreleri Görüntü Özeti

BİST Teknoloji endeksinde yer alan pay senetleri yüksek getiri ve yüksek riske sahiplerdir. BİST 30 endeksinin riski düşük olduğu gibi ortalama getirisi de düşüktür. Yüksek kazanç peşinde risk almayı seven yatırımcılar BİST Teknoloji endeksinde bulunan şirketlere yatırım yapabilirler. BİST Teknoloji endeksi varyansı bileşiminde bulunan tüm pay senetlerinin varyansından daha küçüktür.

Şekil 2'de kovaryans matrisinin ekran görüntüsü sunulmuştur. Matrisin köşegen elemanları pay senetlerinin kendi kendisiyle olan kovaryansını vermektedir, kendi kendisiyle olan kovaryans bireysel varyansına eşittir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
341	KOVARYANS MATRİSİ															
342		ALCTL	ARENA	ARMDA	ASELS	DGATE	DESPC	ESCOM	FONET	INDES	KAREL	KRONT	LINK	LOGO	NETAS	PKART
343	ALCTL	17.4150	4.6551	6.4659	4.2748	6.3140	5.9599	9.8512	6.3039	6.0563	7.0730	6.7004	6.2249	4.3769	9.6602	4.8679
344	ARENA	4.6551	12.5542	5.3794	3.8594	7.1666	6.4220	5.9375	6.4233	4.9264	5.1859	5.6006	6.8099	3.1718	6.0158	3.6599
345	ARMDA	6.4659	5.3794	16.7836	2.8284	5.4786	6.4798	8.4725	7.2496	5.0117	4.5834	5.6269	7.7781	2.9432	5.5968	3.8992
346	ASELS	4.2748	3.8594	2.8284	6.5262	4.3981	3.3169	4.3059	3.4804	3.4022	4.9097	3.6621	3.6995	2.5093	4.6186	2.7455
347	DGATE	6.3140	7.1666	5.4786	4.3981	17.3429	8.2974	6.4280	8.3087	8.3782	7.1711	6.2267	8.1600	4.3836	7.2375	4.8439
348	DESPC	5.9599	6.4220	6.4798	3.3169	8.2974	12.4870	5.7427	7.0806	6.0893	5.9187	4.6680	6.6361	3.6803	6.2774	4.9065
349	ESCOM	9.8512	5.9375	8.4725	4.3059	6.4280	5.7427	28.2943	8.7192	5.6497	5.4890	8.7631	8.8400	3.7214	7.5292	5.7154
350	FONET	6.3039	6.4233	7.2496	3.4804	8.3087	7.0806	8.7192	21.3647	6.2985	5.5231	7.9014	8.8257	4.9272	7.7379	6.1444
351	INDES	6.0563	4.9264	5.0117	3.4022	8.3782	6.0893	5.6497	6.2985	9.0472	5.8212	5.4571	5.6514	3.8819	5.9907	4.6716
352	KAREL	7.0730	5.1859	4.5834	4.9097	7.1711	5.9187	5.4890	5.5231	5.8212	13.5024	5.0697	5.5089	4.1304	7.0457	3.9459
353	KRONT	6.7004	5.6006	5.6269	3.6621	6.2267	4.6680	8.7631	7.9014	5.4571	5.0697	14.0568	6.6241	4.2453	7.8714	3.6997
354	LINK	6.2249	6.8099	7.7781	3.6995	8.1600	6.6361	8.8400	8.8257	5.6514	5.5089	6.6241	20.1624	4.2929	6.3953	4.7447
355	LOGO	4.3769	3.1718	2.9432	2.5093	4.3836	3.6803	3.7214	4.9272	3.8819	4.1304	4.2453	4.2929	7.4938	4.1008	2.4909
356	NETAS	9.6602	6.0158	5.5968	4.6186	7.2375	6.2774	7.5292	7.7379	5.9907	7.0457	7.8714	6.3953	4.1008	15.5151	4.8573
357	PKART	4.8679	3.6599	3.8992	2.7455	4.8439	4.9065	5.7154	6.1444	4.6716	3.9459	3.6997	4.7447	2.4909	4.8573	14.3619

Şekil 2: Excel Kovaryans Matrisi Görüntüsü

Ortalama varyans portföy seçim modelini çözmek için Microsoft Excel yazılımı içinde yer alan Çözücü eklentisi kullanılmıştır. Çözücü kullanmaktaki amacımızı hedeflenen getiri düzeyinden daha fazla getiri elde ederek minimum riskli portföyü bulmak, hedeflenen risk düzeyinden daha düşük riske sahip maksimum getirili portföyü bulmak ve hem riske hem getiriye eşit önem vererek iki amacı birden sağlayan optimal portföyü bulmak dolayısıyla hedeflenen portföylerde yer alacak pay senetlerinin ağırlıklarını saptamak olarak tanımlayabiliriz. Bu sebeple çalışmada 3 farklı model kurulmuştur. Diğer bir amaç, bu amaçları başarırken aynı zamanda portföy büyüklüğünü belirli değerde olmasını sağlamaktır. Tek bir amaç fonksiyonu oluşturarak tüm hedefleri karşılayan bir model oluşturulması için Şekil 1 ve 2'deki parametreler hazırlandıktan sonra tüm kullanılan Excel formülleri ve hücre tanımlamaları aşağıdaki Tablo 2'de sunulmuştur. Kısım 3.2'de sunulan denklemler ve kısıtlamalar Excel formülleriyle oluşturulmuştur.

Tablo 2: Kullanılan Formüller ve Hücre Tanımlamaları

Hücre/Aralık	Tanım	Hücre	Formül
B338:P338	Ortalama Getiriler	B338	=ORTALAMA(B2:B336) B338:P338 kopyalandı.
B343:P357	Kovaryans Matrisi	B343	=KOVARYANS.S($B$2:$B$336;B2:B336) C343:P343 kopyalandı
B359:P359	Karar Değiş./ Pay Senedi Ağırlığı	B357	=(KOVARYANS.S($P$2:$P$336;B2:B336) B357:P357 kopyalandı
Q359	Toplam Ağırlık	Q359	=TOPLA(B359:P359)
B360:P360	$z_i \in [0,1]$	B360	=EĞER(B359=0;0;1) C360:P360 kopyalandı
Q360	Toplam Varlık $\sum z_i$	Q360	=TOPLA(B360:P360)
C362	Portföy Getirisi	C362	=TOPLA.ÇARPIM(B338:P338;B359:P359)
C363	Hedeflenen Getiri	C363	=R338 XUTEK Ort. Getirisi
C364	Portföy Varyansı	C364	=TOPLA.ÇARPIM(DÇARP(B359:P359;B343:P357);B359:P359)
C365	Portföy Riski	C365	=KAREKÖK(C364) Formüllerde varyans kullanılmıştır.
C366	İstenen Varlık Sayısı K=6	B370	=λ_p değeri, λ_p=1 $\lambda_p = 0{,}5$ $\lambda_p = 0$ Opsiyonel seçenekler
C367	Ceza Fonksiyonu	C367	=1000*(Q360-C366)^2
C368	İki Amaçlı Model	C368	=(B370*C364)-((1-B370)*C362)+C367
R339	Minimum varyans	R339	XUTEK Varyansı

Model hazırlama aşamasında çözümlemelere başlarken başlangıçta amaç fonksiyonuna ceza fonksiyonu eklenmemiştir, portföy büyüklüğü için en fazla 6 pay senedi olması kısıtı çözücüde kısıtlayıcılar bölümüne eklenmiştir fakat çözücü uygun bir çözüm bulamamıştır. Daha sonra bu kısıtlama kaldırılarak Ceza fonksiyonuna dönüştürülmüştür ve amaç fonksiyonuna eklenmiştir, bu sayede model 6 adet pay senedi içeren uygun bir çözüm bulabilmiştir. Portföy büyüklüğüne müdahale yapmadan çözümlendiğinde 8 adet pay senedi bulmuştur fakat fazla sayıda pay senedine yatırım yapılmasının dezavantajlarından dolayı sayı mümkün olduğunca literatür ışığında 6 olarak belirlenerek çözümlenmiştir. Çözücüye girilen modeller aşağıdaki Tablo 3'de sunulmuştur. Kısıtlanmamış değişkenleri pozitif yap iletişim kutusu işaretlenerek karar değişkenlerinin pozitif olması sağlanmıştır bu konuda ek kısıtlama girilmemiştir.

Tablo 3: Çözücü Parametreleri

	Parametre	Amaç F.	Karar Değiş.	Kısıtlar
Model I	λ_P=1 K=6	Min. C368	\$B\$359:\$P\$359	\$Q\$359=1 \$C\$362 ≥ \$C\$363
Model II	λ_P=0.5 K=6	Min. C368	\$B\$359:\$P\$359	\$C\$362 ≥ \$C\$363 \$Q\$359=1 \$C\$364 ≤ \$R\$339
Model III	λ_P=0 K=6	Min. C368	\$B\$359:\$P\$359	\$Q\$359=1 \$C\$364 ≤ \$R\$339

Çalışmada önerilen modelde amaç fonksiyonu çift amaçlı olarak hazırlanmıştır. Model I'de portföy riskinin önem değeri (λ_P) "1" olarak girildiği için portföy risk/varyansının minimum olması sağlanmıştır, getiriye önem "0" verilmiştir, sadece getiri oranının BİST Teknoloji endeksi getirisinden yüksek olması sağlanmıştır. Model II'de, portföy riskinin önem değeri (λ_P) için 0.5 önem değeri verilmiştir ve riske ve getiriye eşit önem verilerek getirinin en yüksek riskin en düşük olması istenmiştir. Model III'de ise (λ_P) değeri "0" olduğundan getirinin en yüksek olması istenmiştir, riske önem sıfır verilmiştir, sadece portföy riskinin BİST Teknoloji endeksi riskinden daha düşük olması sağlanmıştır. Model I ve III tek amaçlı Model II çift amaçlıdır. Modeller tekrar tekrar çalıştırılmıştır ve en iyi sonuç değerleri raporlanmıştır. Buna göre Model I sonuçları Şekil 3'teki gibidir.

358		ALCTL	ARENA	ARMDA	ASELS	DGATE	DESPC	ESCOM	FONET	INDES	KAREL	KRONT	LINK	LOGO	NETAS	PKART	Top.
359	AĞIRLIKLAR	0.00	0.00	0.07	0.40	0.00	0.02	0.00	0.00	0.07	0.00	0.00	0.00	0.32	0.00	0.11	1.00
360	Zi	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	6
361																	
362	Portföy Getisisi		0.2413														
363	Hedeflenen Getiri		0.14466														
364	Portföy Varyansı		4.25306														
365	Portföy Riski		2.06229														
366	K		6														
367	Ceza		0														
368	İki Amaçlı		4.2530557														

Şekil 3: Excel Model I Sonuçları Görüntüsü

Model I sonuçlarına göre; yatırımcı fonlarının %40'ını Aselsan Elektronik Şirketi'ne %32'sini Logo Yazılım Şirketi'ne, yaklaşık %12'sini Plastikkart Akıllı Kart İletişim Sistemleri Şirketi'ne, %7'sini İndeks Bilgisayar Sistemleri Şirketi'ne, %7'sini Armada Bilgisayar Şirketi'ne ve %2'isini Despec Bilgisayar Pazarlama Şirketi'ne yönlendirir ise yatırımcının en düşük riskle XUTEK getirisi üzerinde bir getiri sağlaması muhtemeldir. Hesaplamalar yapılırken getiri değerleri 100 ile çarpılarak oluşturulmuştur dolayısıyla beklenen portföy getirisi %0,2413 olmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken en düşük riskle hedeflenen getiri düzeyinin %10 aşılmış olması ve BIST 30 ortalama getirisinden 14 kat fazla getiri elde edilebilinmesidir. Portföy varyansı 4,25 değeri, XUTEK varyans değerinden (5,47) daha düşüktür. Portföy getirisi hedeflenen getiriden yüksektir Çözücü tüm kısıtlamaları karşılamıştır ve 6 adet pay senedi sayısını sunmuştur. Model I için varyans kısıtı eklenmemiştir çünkü Model I hali hazırda varyansı minimum yapmak üzerine kurulmuştur.

Model II sonuçlarına göre yatırım yapılan pay senetleri değişmemekle birlikte oranlarında farklılıklar bulunmuştur; fonlarının %37'si Aselsan Şirketi'ne, %34'ü Logo Şirketi'ne, %12'si

Plastikkart Şirketi'ne, %7'si Armada Şirketi'ne, %6'sı İndeks Şirketi'ne ve %4'ü Despec Şirketi'ne yatırılmalıdır. Eşit önem verilen Model II sonuçları Model I'e göre, portföy varyansı 4,2592'e yükselmiş, getirisi ise %0,2495'e yükselmiştir. Her iki modelde de portföy büyüklüğünün 6 olması sağlanmıştır ve ceza değeri sıfır çıkmıştır. Çözücü, ceza fonksiyonunu hesaplamalarına dahil edebilmiştir ve tüm kısıtlamalar karşılanmıştır.

Model III için program çalıştırıldığında çözücü çözüm bulmada oldukça zorlanmıştır. Farklı başlangıç noktaları denendikçe farklı çözüm değerleri raporlanmıştır ve bunların içinden en iyi olan seçilmiştir. Çözücünün farklı sonuçlar için yüksek ceza değerine katlanmasına anlam verilememiş ve problem bir de Excel Açılım modülünde çözümlenmeye çalışılmıştır. Açılım modülü, GRG altyapısına göre amaç fonksiyonu bazlı çalıştığı için ceza fonksiyonunu daha iyi anlamlandırabileceği düşünülmüştür. Fakat Açılım modülü GRG' ye kıyasla uygun bir sonuç bulamamıştır, bunun sebebinin XUTEK varyans değerinin çok düşük kalması sebebi ile olduğu anlaşılmıştır. XUTEK varyans değeri 8 değerine arttırılarak çözücü çalıştığında Açılım modülü çözüm bulabilmiştir bulunan çözümler üzerinden tekrar çözücünün çözmesi istenerek başarılı sonuçlara ulaşılmıştır. Açılım modülü uygun çözümler bulurken portföy büyüklüğünün kesinlikle 6'dan farklı olmamasını çok iyi başarmıştır, GRG Ceza fonksiyonu ile çok daha iyi çalışmaktadır. Nihayetinde Model III için bulunan GRG seçeneği en uygun çözüm değerleri Açılım modülüne girdi başlangıç noktaları girilmiştir fakat Açılım seçeneği GRG'den daha iyi bir sonuç bulamamıştır. Çözümü zor ve kısıtları dar alanda olan problemler için GRG'nin daha başarılı olduğunu söyleyebiliriz.

En yüksek getiriyi ve XUTEK riskinin altında bir riski hedefleyen Model III GRG sonuçlarına göre; %37 LOGO Şirketi'ne, %18 Plastikkart Şirketi'ne, %18 Arena Şirketi'ne, %15 Karel Elektronik Şirketi'ne, %10 Fonet Şirketi'ne ve %2 Aselsan Şirketi'ne, toplamda 6 adet pay senedine yatırım yapılırsa %0,4219 getiri oranı elde edilebilir. Bu değer yaklaşık BİST 30 ortalama getirisinden 25 kat fazla ve XUTEK ortalama getirisinden hemen hemen 3 kat fazladır. Model III'e göre oluşturulan portföyün varyansı 5,4667 değeriyle tam tamına 5,4668 XUTEK varyansından düşük bulunmuştur.

Son olarak ceza fonksiyonu kaldırılarak yani portföy büyüklüğü serbest bırakılarak Model III çözülmüştür ve GRG modülü global optimuma ulaşmıştır, hangi başlangıç noktası seçilirse seçilsin GRG aynı sonucu bulmuştur. Yüksek getiri hedefleyen yatırımcılar için bu pay senetleri, %34 LOGO, %18'er Arena ve Plastikkart, %11 Karel, %7 Fonet, %6 Escort, %4 Armada ve %2 Alcatel Şirketleri olmaktadır. Getiri oranı %0,4336, portföy varyası 5,4667 bulunmuştur. Burada bulunan getiri oranını portföy büyüklüğü 6 ile elde edilen Model III sonuçları ile kıyaslarsak %1'lik getiri farkı vardır ve bu fazladan 2 adet alım satım işlem maliyetine katlanmayı ve işlem çabası gerektirecektir. Böylelikle ceza fonksiyonu ile bulunan portföyün optimal olduğu, ceza fonksiyonunun işe yaradığı sağlama ile test edilmiştir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada ilk aşamada DOP problemlerinin yapısı incelenmiştir. Doğrusal olmayan problemin DOP yardımıyla çözümlenebilmesi için çözüm kümesinin konveks olup olmadığının nasıl belirlenmesi gerektiği, DOP varsayımları ve Excel DOP GRG Çözücüsünün nasıl çalıştığı araştırılmıştır. Bu çalışmadan edinilen bilgilere göre Excel GRG alt yapısı mümkün olduğunca kısıtsız oluşturulan problemlerde uygun bir çözüm bulabilmektedir, doğrusal modellerde global en iyiyi bulurken doğrusal olmayan modellerde global en iyi çözümü bulmada zorlanmaktadır ve yaklaşık global çözümler sunmaktadır.

Portföy optimizasyonu konusunda Excel Çözücüde yapılan çalışmalarda portföy büyüklüğüne müdahale edilmemiştir bu çalışmada portföy büyüklüğü belirlenerek modele kısıt olarak eklenmiştir fakat Excel Çözücü uygun bir çözüm bulamadığından portföy büyüklüğü kısıtı Ceza fonksiyonuna dönüştürülmüş ve amaç fonksiyonuna eklenmiştir. Bu sayede model bu kısıttan arındırıldığı için Çözücü en iyi çözümü bulabilmiştir. Bu model önerisi ile literatürdeki çalışmalar bir adım öteye taşınmıştır, karmaşık algoritmaları kullanarak çözümlenecek problemler Excel Çözücü ortamında kolaylıkla çözümlenebilir hale getirilmiştir.

İlerleyen çalışmalarda, Excel'de önerilen bu model sonuçlarının farklı portföy yapılarında Hedef Programlama ve Genetik Algoritmalarla karşılaştırılması yapılabilir ve oluşturulan portföylerin performansları değerlendirilebilir. Excel Çözücüdeki bu model üzerinden λ_p'nin değişen değerleri ile yani riskin ve getirin farklı önem dereceleriyle, farklı senaryolar üretilebilir ve oluşturulan portföylerin performansları karşılaştırılabilir. Son olarak, portföy optimizasyonu çalışmalarında bazen 0,001 gibi önemsenmeyecek ağırlıklar çıkabilmektedir ve bu durumda "z" değeri 1 olacaktır fakat anlamsız bir yatırım olacaktır. Böyle bir durum ile karşılaşılır ise karar değişkenlerine yani ağırlıklara belirli değerden örneğin %3'ten büyük ya da "0" ve 1'den küçük olması gibi ek kısıt eklenebilir ve önerilen model Excel programında genişletilebilir.

KAYNAKÇA

Abay, R. (2013). Markowitz Karesel Programlama ile Portföy Seçimi: İMKB 30 Endeksinde Riskli Portföylerin Seçimi. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *22* (2), 175-194. Https://Dergipark.Org.Tr/Tr/Pub/Cusosbil/İssue/4393/60454.

Akay, D. & Çetinyokuş T. & Dağdeviren, M. (2002). Portföy Seçimi Problemi için KDS/GA Yaklaşımı. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, *17*(4), 125-138. Https://Dergipark.Org.Tr/Tr/Pub/Gazimmfd/İssue/6654/89312.

Akçayır, Ö. & Doğan, B. & Demir, Y. (2014). Elton-Gruber Kısıtlı Markowitz Kuadratik Programlama Modeli ile Portföy Optimizasyonu: BIST-50 Üzerine Bir Uygulama. *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, *19*(3), 333-3352. Https://Dergipark.Org.Tr/Tr/Pub/Sduiibfd/İssue/20814/222672.

Aygören, H. & Akyer, H. (2013). Etkin Portföylerin Belirlenmesinde Veri-Aralığı, Hisse Senedi Sayısı ve Risk Düzeyi Faktörlerinin Etkisi. *Uluslararası Alanya İşletme Fakültesi Dergisi*, *5*(2), 9-17. Http://Www.Acarindex.Com/Dosyalar/Makale/Acarindex-1423869017.Pdf.

Bahtiyar, B. (1989). *Doğrusal Olmayan Programlama Modellerinden Quadratik Programlamanın Süt ve Süt Ürünlerinin Üretim Planlamasında Uygulanması* (Yüksek Lisans Tezi). Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Bazaraa, M. S. & Sherali, H. D. & Shetty, C.M. (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley and Sons.

Çetin, C. (2007). Markowitz Kuadratik Programlama ile Optimal Portföy Seçimi. *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, *12* (1), 63-81. Https://Dergipark.Org.Tr/Tr/Pub/Sduiibfd/İssue/20837/223288.

Frontlıne Solvers, (2020a, 5 Mayıs). *Excel Solver: Algorithm and Methods Used*. https://Www.Solver.Com/Excel-Solver-Algorithms-And-Methods-Used.

Frontlıne Solvers, (2020b, 5 Mayıs). *Standard Excel Solver: Limitations Nonlinear Optimization*. Https://Www.Solver.Com/Standard-Excel-Solver-Limitations-Nonlinear-Optimization.

Frontlıne Solvers, (2020c, 5 Mayıs). *Solver Technology: Smooth Nonlinear Optimization*. Https://Www.Solver.Com/Solver-Technology-Smooth-Nonlinear-Optimization.

Frontlıne Solvers, (2020d, 5 Mayıs). *Excel Solver: Nonlinear Optimization*. Https://Www.Solver.Com/Excel-Solver-Nonlinear-Optimization.

Frontlıne Solvers, (2020e, 5 Mayıs). *Excel Solver: What Solver Can and Cannot Do*. Https://Www.Solver.Com/Excel-Solver-What-Solver-Can-And-Cannot-Do

Frontline Solvers, (2020f, 5 Mayıs). *Excel Solver: GRG Nonlinear Solving Method Stopping Conditions*. https://Www.Solver.Com/Excel-Solver-Grg-Nonlinear-Solving-Method-Stopping-Conditions.

Irala, L. R. & Patil, P. (2007). Portfolio Size and Diversification, SCMS. *Journal of Indian Management*, *4* (1), 1-6.

İskenderoğlu, Ö. & Karadeniz, E. (2011). Optimum Portföyün Seçimi: İMKB 30 Üzerinde Bir Uygulama. *Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, *12* (2), 235-257.

Kaya, C. (2012). *Doğrusal Olmayan Programlama ile Portföy Analizi* (Yüksek Lisans Tezi). Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kaya, F. (2006). *Karesel Programlama ile Portföy Oluşturulması* (Yüksek Lisans Tezi). Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Kuhn, H. W. & Tucker, A. W. (1951). Nonlinear Programming, (Ed.) Neyman, J., *Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (481-492), University of California Press. Https://Projecteuclid.Org/Euclid.Bsmsp/1200500249.

Kunt, S. & Hammond P. J. (1995). *Mathematics for Economic Analysis,* Prentice Hall.

Korhan, E. (2013). *Çok Dönemli Markowitz Ortalama Varyans Portföy Optimizasyonu ile En Uygun Yatırım Vadelerinin Belirlenmesi: BİST 30 Endeks Hisseleri Üzerine Bir Uygulama* (Yüksek Lisans Tezi). Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Küçükkocaoğlu, G. (2002). Optimal Portföyün Seçimi ve İMKB Ulusal-30 Endeksi Üzerine Bir Uygulama. *Active-Bankacılık ve Finans Dergisi*, (26), 74-91.

Lasdon, L.S. & Waren, A. D. & Jaın, A. & Ratner, M. (1978). Design and Testing of A Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming. *ACM Transactions on Mathematical Software*, *4* (1): 34-50. Https://Doi.Org/10.1145/355769.355773.

Markland, R. E. & Sweigart, J. R. (1987). *Quantitive Methods: Applications to Managerial Decision Making.* John Wiley and Sons.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance, 7*(1), 77-91. 10.4236/Jfrm.2019.81003.

Tosun, Ö. & Oruç, E. (2010). Portföy Büyüklüğünün Portföy Riski Üzerine Etkileri: İMKB-30 Üzerinde Test Edilmesi. *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 15* (2), 479-493. Https://Dergipark.Org.Tr/Tr/Pub/Sduiibfd/İssue/20827/223041

Ulucan, A. (2002). Markowitz Kuadratik Programlama ile Portföy Seçim Modeli Uygulaması: İMKB-30 Endeksi ile Aynı Risk-Getiri Yapısına Sahip Portföyün Belirlenmesi. *Hacettepe Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, *20*(2), 141-153. Https://Dergipark.Org.Tr/Tr/Pub/Huniibf/İssue/7883/103588.

Wınston W. L. (2004). *Operations Research*, International Thomson Publishing.

Taha, H. (2000). *Yöneylem Araştırması*. (Çev. Baray, Ş.A & Esnaf, Ş.). Literatür Yayınları.

Yazıcı, A. (2005*). Doğrusal Olmayan Programlama Yöntemlerinin Sistem Denetiminde Kullanılması* (Doktora Tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

EXTENDED ABSTRACT

If there are nonlinear equations or inequalities in the constraints or the objective function of the mathematical programming model developed for problems encountered in operations research, the solution method of the problem is called nonlinear programming (NLP). Most real-life problems such as portfolio optimization are multivariate and constrained nonlinear programming problems. It is important to understand the NLP problems in order to provide the optimal solution of the problems in this structure. Although there are meta-heuristic solutions for NLP problems higher than the second degree, there are still gaps in the solution area with NLP, which uses quadratic functions such as portfolio optimization, especially in controlling portfolio size.

Excessive number of stocks are to be included in the portfolio, making the portfolio difficult to manage and creating a serious burden due to the fact that the commissions paid in trading are not included in the calculations. Therefore, portfolio size should not be an uncontrolled variable in portfolio optimization problems. In this study, therefore, an additional constraint that allows the portfolio size to be kept at a certain limit is included in the optimization model.

When studies using portfolio optimization are examined in the related literature, it is seen that portfolio size constraint application has not been observed in studies conducted with Excel Solver NLP, as it is thought that this problem could only be solved by using meta-heuristic methods and advanced software. However, such problems can also be solved with NLP by using heuristic methods that can provide near-optimal solutions. The contribution of the study to the literature is as follows; the problem in the presence of portfolio size constraint will be solved with Excel nonlinear Generalized Reduced Gradient (GRG) solver and the formulas to be used will be presented.

The difference of this study from other portfolio optimization studies is that it provides a useful model for practitioners and decision makers with the preparation of mathematical equations in accordance with the theory, regardless of financial management. In addition, in terms of financial management, it has been tried to create portfolios over Istanbul Stock Exchange (BIST) 100 and 30 in the relevant literature. In the present study, a portfolio will be created for stocks in the BIST Technology (XUTEK) stocks, which might provide immense benefits to the companies and investors as technology is one of the industries that have always progressed beyond the age, appealing investors to allocate their funds.

The purpose of this study is to propose a model in the Excel worksheet, using the penalty function, in order to optionally determine the number of stocks to be included in the portfolio. Other purpose is to show the Excel formulas of the proposed model and to test the applicability of the model in portfolio problems with different objectives. Accordingly, single-objective models aiming the lowest risk and highest return, and multi-purpose models aiming both low risk and high return will be resolved with portfolio size constraint. Another purpose of the study is to provide an understanding of the problem structure and NLP assumptions so that the solutions obtained from NLP problems reach the global optimal solution.

Within the scope of the method of the study, the issues explored are the structure of the NLP problem, its concepts, and how to determine whether the problem is convex or not for optimal solutions. NLP assumptions and methods to be used as a solution to the problem are investigated. A general constrained NLP problem can be solved and / or removed from its constraints by using

Lagrange Multipliers, Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Conditions, Penalty and Barrier functions. Then, Gradient and Newton methods, which are the approximate solution methods of multivariable unconstrained NLP problems, can be used.

Generalized Reduced Gradient (GRG) method code is used in Excel Solver add-on for NLP problems. The GRG method can be seen as an extended extension of the Simplex method for NLP. This solver code first translates the constrained problem into an unconstrained optimization problem with KKT conditions. It takes the partial derivative of the objective function and reaches the optimum solution when the partial derivatives are equal to zero.

NLP methods become insufficient when the constraints move away from linearity and the number of constraints increases in the NLP problem. The greater the number of constraints, the harder it will be for the Excel Solver to find the optimal solution. In the presence of these disadvantages, Penalty and Barrier methods provide easy results. The problem becomes unconstrained optimization problem through methods of Penalty and Barrier functions. The Barrier method is applied in the presence of equality constraints and the penalty method is applied in the presence of inequality constraints. There are different types of Penalty function examples.

In this study, a Penalty function, which is widely used in practice, is used to move the portfolio size constraint problem away from this constraint. Accordingly, the amount of non-fulfilment of the respective constraint is squared and added to the objective function in a way that adversely affects the objective function. Solver features are introduced to understand the functioning of Excel GRG Solver, which is determined as a solution tool for the constrained portfolio optimization problem. Later, by presenting formulas that need to be written in Excel, portfolio size constraint is converted into Penalty function. The setup of the NLP portfolio optimization model is expressed and the suitability of the model for optimal solutions is explained theoretically.

Data for 335 days between 10.01.2019 and 12.05.2020 of 15 companies, which are components of BIST Technology index, are obtained. The proposed model is applied over this data set, with the maximum portfolio size of 6.

After the data is processed in the Excel worksheet, the daily returns of the companies are calculated, and the average and variances of their returns are calculated. The average returns of BIST 30 and BIST Technology (XUTEK) indices are calculated to determine the targeted return level. Since the average return of XUTEK index is higher than the average return of BIST 30 index, it is ensured that the portfolio return is higher than the average return of the XUTEK index. Variances of BIST 30 and XUTEK indices are also calculated.

It is ensured that the portfolio variance, which means the risk of the portfolio, is lower than the average variance value of the XUTEK index. The number of decision variables that present the optimal weights of the assets to be included in the portfolio is 15. The number of decision variables is greater than the number of constraints. Stocks included in the XUTEK index have high returns and high risk.

Three models are formed under the portfolio size constraint. Model I composes a portfolio with minimum risk that yields more than the targeted return level, Model II composes the optimal portfolio that meets both objectives by giving equal importance to both risk and return. Model III composes a portfolio with maximum return with less risk than the targeted level of risk.

Before starting the model solutions, the penalty function was not added to the objective function, the constraint to have a maximum of 6 stocks for the portfolio size was added to the constraints tab in the solver, but the solver could not find a suitable solution. Later, this restriction was removed from the constraints and transformed into the Penalty function and added to the objective function, so the models were able to find a suitable solution that includes 6 stocks. For all three models, the solver was able to include the penalty function in its calculations, the penalty value was "0" and all restrictions were met.

According to Model I solutions, if the investor directs 40% of the funds to Aselsan Electronic Company, 32% to Logo Software Company, approximately %12 to Smart Card Communication Systems Company, 7% to Indeks Computer Systems Company, 7% to Armada Computer Company, 2% to Despec Computer Marketing Company, the investor is likely to earn a return which is above the return of XUTEK with the lowest risk.

According to Model II solutions providing equal importance to risk and return, the assets in the portfolio did not change, but the ratios of the assets changed. 37% of the funds should be allocated to Aselsan Company, 34% to Logo Company, 12% to Smart Card Company, 7% to Armada Company, 6% to Indeks Company and 4% to Despec Company.

According to Model III GRG solutions targeting the highest return and a risk below XUTEK risk; 37% of the funds should be invested to LOGO, 18% to Smart Card, 18% to Arena, 15% to Karel Electronic, 10% to Fonet and 2% to Aselsan. If these 6 stocks are invested, 0.4219% return rate can be obtained. This value is approximately 25 times higher than the average return of BIST 30 and almost 3 times higher than the average return of XUTEK index. It was observed that the variance of the optimal portfolio of Model III was lower than the XUTEK variance.

When Model III was solved by removing the penalty function from the model without interfering with the size of the portfolio, the solver found 8 stocks and a 1% return difference occurred. According to this finding obtained within the scope of financial management, having 2 more assets in the portfolio will require an additional 2 trading transaction costs and transaction effort. On account of this, a balance has been attained between the advantage of decreasing risk due to good diversification and the disadvantage of increasing costs due to the increase in the number of assets in the portfolio. It was occurred that the portfolio realized with the penalty function is optimal and the penalty function works.

In this study, the theoretical appropriateness of the portfolio size constrained model proposal realized with the Penalty function was explained and tested. With the present study, the accumulated knowledge in the literature may be taken one step further, by showing that the Excel Solver can be easily adapted to solving problems that require complex algorithms.

In future studies, by using the solutions of this model proposed in Excel in different portfolio structures, optimal portfolio size problems can be solved, the proposed model can be compared with Goal Programming and Genetic Algorithms, and the performances of optimal portfolios can be evaluated.